Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Nombre: ______________
Carné: ______________
Sección: ______________

Matemáticas II (MA-1112)
Enero-Marzo 2008
Segundo Examen Parcial (35%)
Tipo B

Soluciones

(1) **(6 puntos) Halle el (los) valor(es) de $x \in (-1,1)$ que satisface(n) la expresión:**

Solución:

$$\begin{aligned}
\ln(\sqrt{x^2+1}) - \ln((x+1)^{1/2}) - \ln(1-x) &= 0 \\
\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x+1}(1-x)}\right) &= 0 \\
\text{(exponenciando a ambos lados)} & \\
\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x+1}(1-x)} &= 1 \\
\sqrt{x^2+1} &= \sqrt{x+1}(1-x) \\
x^2+1 &= (x+1)(1-x)^2 \\
x^2+1 &= (x+1)(1-2x+x^2) \\
x^3-2x^2-x &= 0 \\
x(x^2-2x-1) &= 0
\end{aligned}$$

Obteniendo $x_1 = 0$, $x_2 = 1+\sqrt{2}$, y $x_3 = 1-\sqrt{2}$.

Como $x_2 = 1+\sqrt{2} \notin (-1,1)$ entonces la descartamos.

(2) **(4 puntos c/u) Calcule**
Solución:

(a) Haciendo el cambio de variable $u = \ln(x)$, $du = \frac{1}{x}dx$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\ln(x)\ln(\ln(x))} &= \int \frac{du}{u\ln(u)} \\
&\text{(haciendo } v = \ln(u) \text{ y } dv = \frac{1}{u}du) \\
&= \int \frac{dv}{v} \\
&= \ln|v| + C \\
&= \ln|\ln|u|| + C \\
&= \ln|\ln|\ln|x||| + C.
\end{aligned}
$$

(b) Como $e^{|t|}$ es una función par y estamos integrando sobre un intervalo simétrico alrededor del cero, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} e^{-|t|}dt &= 2\int_0^{\ln(2)} e^{-t}dt \\
&= -2e^{-t}\Big|_{t=0}^{t=\ln(2)} \\
&= -2\left[\frac{1}{2} - 1\right] \\
&= 1
\end{aligned}
$$

También es válido calcular la integral abriendo el valor absoluto y escribiendo la integral como suma de dos integrales de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} e^{-|t|}dt &= \int_{-\ln(2)}^{0} e^{t}dt + \int_0^{\ln(2)} e^{-t}dt \\
&= e^{t}\Big|_{t=-\ln(2)}^{t=0} - e^{-t}\Big|_{t=0}^{t=\ln(2)} \\
&= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

(c) $\int \frac{e^x}{16+e^{2x}}dx$ **Solución:** Haciendo el cambio de variable $u = e^x$, $du = e^x dx$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x}{16+e^{2x}}dx &= \int \frac{du}{16+u^2} \\
&\frac{1}{16}\int \frac{du}{1+\left(\frac{u}{4}\right)^2} \\
&(\text{haciendo } v = \frac{u}{4},\ 4dv = du) \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{dv}{1+v^2} \\
&= \frac{1}{4}\arctan(v) + C \\
&= \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{u}{4}\right) + C \\
&= \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{e^x}{4}\right) + C.
\end{aligned}$$

(d) $D_x\left(e^{\sqrt{2}x} - \log_8(x^{\sqrt{3}})\right)$
Solución:

$$D_x\left(e^{\sqrt{2}x} - \log_8(x^{\sqrt{3}})\right) = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}x} - \frac{\sqrt{3}}{x\ln 8}.$$

(3) **(6 puntos) Demostrar que**
$D_x\mathbf{senh}^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
Demostración: Derivando a ambos lados $\operatorname{senh}(\operatorname{senh}^{-1}(x)) = x$, tenemos que

$$\begin{aligned}
(\operatorname{senh}^{-1}(x))' &= \frac{1}{\operatorname{senh}'(\operatorname{senh}^{-1}(x))} \\
&= \frac{1}{\cosh(\operatorname{senh}^{-1}(x))} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+[\operatorname{senh}(\operatorname{senh}^{-1}(x))]^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned}$$

Observe que también puede hacerse derivando la expresión $\operatorname{senh}^{-1}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ válida para $x \geq 1$.

(4) **(7 puntos) La región acotada por la curva $y = x(4-x)$ y el eje x se hace girar alrededor del eje x. Halle el volumen del sólido de revolución resultante.**

Solución:
Este problema se puede hacer de dos maneras:
por discos

$$V = \pi\int_0^4 x^2(4-x)^2dx = \frac{512\pi}{15},$$

o por casacarones cilíndricos

$$
\begin{aligned}
V = 2\pi \int_0^4 (2 + \sqrt{4-y} - 2 + \sqrt{4-y})dy &= 4\pi \int_0^4 y\sqrt{4-y}dy \\
&= \frac{512\pi}{15}.
\end{aligned}
$$